11/04/2019

Μάθημα 12ο

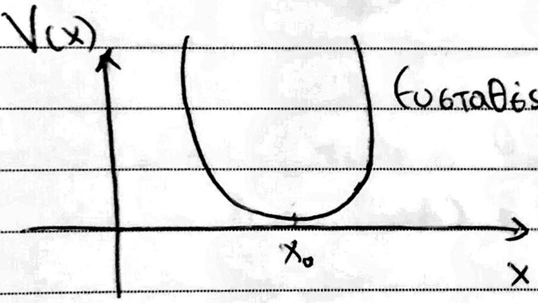
Σημεία Ισορροπίας

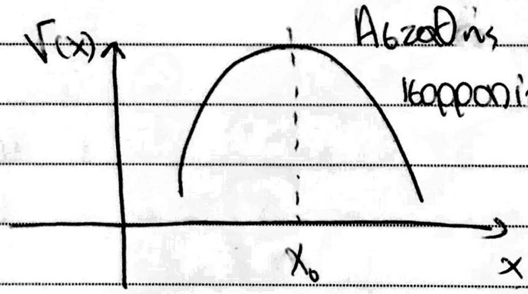
Δ.Ε. $x(t)$ π.χ. $m\ddot{x} = F(x,\dot{x})$, Δ.Ε. για ένα βαθμό ελευθερίας
π.χ. κινείται πάνω στον άξονα Ox (άρα θα έχουμε μια ΣΔΕ 2ης τάξης) γενικά η Δ.Ε. θα είναι γραμμική.

$$\boxed{\ddot{x} + \underbrace{\omega^2}_{k} x = 0}$$ Δ.Ε. απλού αρμονικού ταλαντωτή

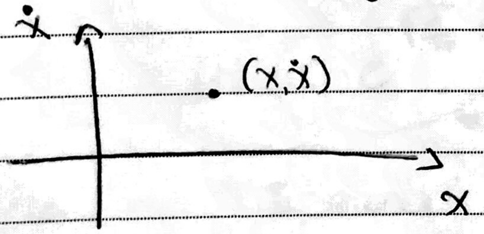
$$\omega^2 = k = \frac{d^2 V(x)}{dx^2}$$, αν $F(x)$ είναι συντηρητική δύναμη

Τότε $\exists\ V(x)$ τ.ω. $F(x) = -\dfrac{dV(x)}{dx}$

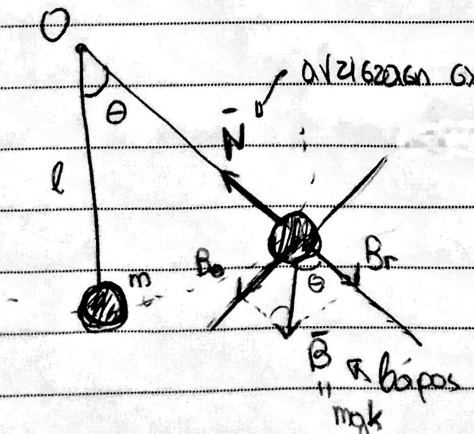




Μελετάω τα ζευγάρια $(x, \dot{x}) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$



Το απλό εκκρεμές:



$B_r = mg\cos\theta$
$B_\theta = mg\sin\theta$

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_r = |\bar{N}| - |\bar{B}_r| = 0 & \text{r-διεύθυνση} \\ m a_\theta = -|\bar{B}_\theta| & \text{θ-διεύθυνση} \end{cases}$$

Ισορροπία σε αυτόν τον άξονα

αναλύω στις συνιστώσες

$$\Rightarrow m a_\theta \bar{\theta}_0 = -|\bar{B}_\theta| \cdot \bar{\theta}_0$$

$$\Leftrightarrow m a_\theta = -mg\sin\theta \Rightarrow m(\cancel{2\dot{r}\dot{\theta}} + r\ddot{\theta}) = -mg\sin\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{=l}{r}\ddot{\theta} = -g\sin\theta \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{g}{l}}_{=\omega^2}\sin\theta = 0} \text{ ή } \boxed{\begin{matrix}\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0 \\ \omega^2 = g/l\end{matrix}}$$

Χαρακτηρισμός εξίσωσης : $\theta(t)$, ΣΔΕ, $2^{ης}$ τάξης, μη γραμμική, ομογενής

για μη γραμ. 2 τρόποι:
- ποιοτική ανάλυση → Σ.Ι. → βγάζω συμπέρασμα;
- προσεγγιστική ανάλυση

Γράφουμε την ΣΔΕ στη μορφή: Θέτω $\theta = x$, $\dot{\theta} = y$

Σύστημα ΣΔΕ $1^{ης}$ τ. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2\sin x \end{cases}$

Τα κρίσιμα σημεία ή πιθανά σημεία ισορροπίας είναι για $y=0$

Τότε: $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$, $n = 0,1,2,\ldots$

Άρα:

$(x,y) = (\theta,\dot{\theta}) = (0,0)$ και $(x,y) = (\theta,\dot{\theta}) = (\pi,0)$

(βγάζω συμπεράσματα ποιοτικά για το σύστημα. (όλα για τα Σ.Ι.)).

Υπενθύμιση: επιτάχυνση σε πολικές : $\bar{a} = a_r \cdot \bar{r}_0 + a_\theta \bar{\theta}_0 =$

$= (\underset{=0}{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2)\bar{r}_0 + (\underset{0}{\cancel{2\dot{r}\dot{\theta}}} + \underset{\neq 0}{r\ddot{\theta}})\bar{\theta}_0$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζε.

Θα κάνουμε τώρα την αναλυτική λύση:

$\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0$, $\omega^2 = g/l$

$\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$ από το πρώτο Κ.Σ. ή Σ.Ι.

Αναπτύσσω κατά Taylor

Δεν τα λαμβάνω υπόψην

$$\frac{d^2}{dt^2}(\theta_0+\theta_1) + \omega^2\left(\underbrace{\sin\theta\Big|_{\theta_0=0}}_{\to 0} + \frac{d}{d\theta}\sin\theta\Big|_{\theta_0=0}\theta_1 + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\theta^2}\sin\theta\Big|_{\theta_0=0}\theta_1^2 + \dots\right)=0$$

Γραμμικοποιώ → κρατάω όρους μέχρι 1η παράγωγο
Τους υπόλοιπους δεν τους λαμβάνω υπ' όψην

$$\iff \ddot{\theta}_1 + \omega^2(\theta_1+\dots)=0 \iff \boxed{\ddot{\theta}_1+\omega^2\theta_1=0}$$

ευσταθείς τροχιές ταλαντούμενος

αφού $\omega^2>0$ ευσταθές Σ.Ι.

$\theta_1(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$, $\omega=\sqrt{g/\ell}$ συχνότητα ταλαντ.

ταλάντωση

Υποθέτω ότι το $\theta(t)=e^{at}$ τότε $a^2 \cdot e^{at}+\omega^2 e^{at}=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{at}}_{\neq 0}\underbrace{(a^2+\omega^2)}_{=0}=0 \Rightarrow a^2=-\omega^2 \Rightarrow a=\pm i\sqrt{\omega^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t)=c_1e^{i\omega t}+c_2e^{-i\omega t}}$$

(θα βρω A=0)

Θα τη γραμμικοποιήσω.

$$\frac{d^2}{dt^2}(\theta_0+\theta_1)+\omega^2\sin(\theta_0+\theta_1)=0 \iff \ddot{\theta}_1+\omega^2\sin(\pi+\theta_1)=0$$

αφού $\frac{d\theta_0}{dt}=0$

$$\iff \ddot{\theta}_1+\omega^2\left[\underbrace{\sin\pi}_{\to 0} + \left(\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)\right)_{\theta=\pi}\theta_1+\dots\right]=0 \iff$$

$$\iff \boxed{\ddot{\theta}_1-\omega^2\theta_1=0}$$ ασταθείς τροχιές

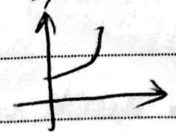
Επειδή $-\omega^2<0$ το $\theta=\pi$ είναι ασταθές Σ.Ι.

$\theta_1=c_1e^{\omega t}+c_2e^{-\omega t}$, $\theta_0=\pi$, $\dot{\theta}_0=0$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}, \quad \begin{cases} \pi=c_1e^{\omega\cdot 0}+c_2\cdot e^{-\omega\cdot 0}=c_1+c_2 \Rightarrow c_1=\pi-c_2 \\ 0=\omega c_1e^{0}-\omega c_2\cdot e^{0} \Rightarrow 0=\omega(c_1-c_2) \end{cases} \dots$$

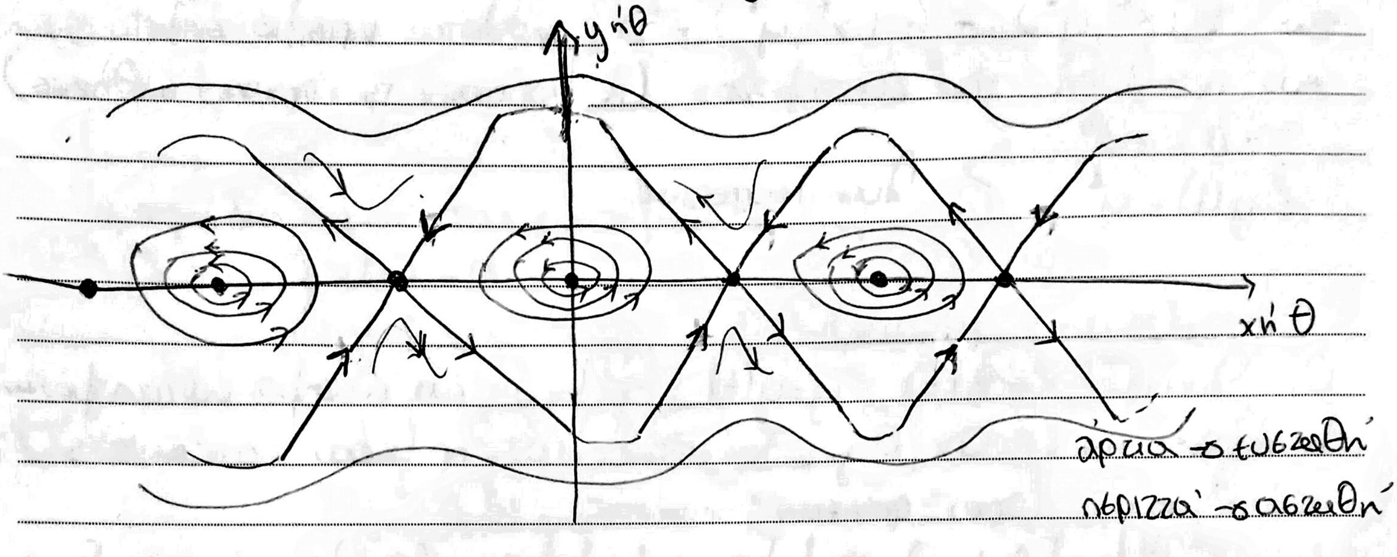
⇒ Βρίσκω c_1, c_2. Μάλλον $c_2=0$

και έχω



Άρα έχω ασταθές Σ.Ι.

Συμπέρασμα: ① $(\theta_0,\dot{\theta}_0)=(x,y)=(0,0)$, ευσταθές Σ.Ι.
② $(\theta_0,\dot{\theta}_0)=(x,y)=(\pi,0)$, ασταθές Σ.Ι.



Στα ευσταθή σημεία ισορροπίας → έχω ελλείψεις
Στα ασταθή ——— // ——— → υπερβολικές (όπως στα σάγματα)

Διαγράμματα Φάσεως (Ποιοτική Θεωρία)

Εργαζόμαστε με Δ.Ε. της μορφής: $\boxed{\ddot{x} = f(x,\dot{x})}$

Πολλές φορές είναι δύσκολο ή αδύνατο να λύσουμε τη Δ.Ε.
Γράφουμε τη διαφορική εξίσωση στη μορφή (θέτω $y=\dot{x}$)

$$\begin{cases}\dot{x} = y\\ \dot{y} = f(x,y)\end{cases}$$

Σ' αυτό το σύστημα δεν παρουσιάζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή
(Αυτό καλείται αυτόνομο)

Γενικά ένα αυτόνομο σύστημα είναι:

$$\begin{cases}\dot{x} = F(x,y)\\ \dot{y} = G(x,y)\end{cases}$$

Θεωρούμε ότι οι F, G είναι διαφορίσιμες σε μία περιοχή του επιπέδου Oxy ή $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.
Παρατηρούμε ότι υπάρχουν λύσεις του συστήματος όταν $F(x,y)=G(x,y)=0$, δηλαδή όταν $\dot{x}=\dot{y}=0$ (σταθερές λύσεις)

Ορισμός: ένα σημείο (x^*, y^*) του συστήματος $\begin{cases} \dot{x} = F(x,y) \\ \dot{y} = G(x,y) \end{cases}$

τ.ω. $F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$ καλείται κρίσιμο σημείο και η λύση του συστήματος (ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες)

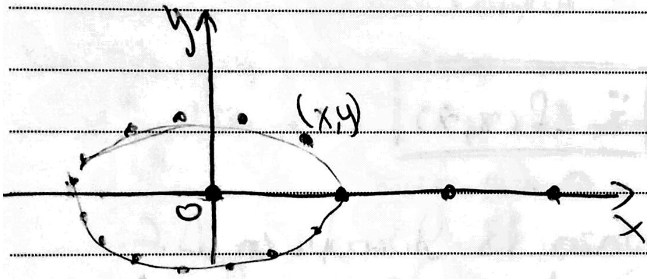
$\begin{cases} x(t) = x^* \\ y(t) = y^* \end{cases}$ > λύση ισορροπίας

Ορισμός (χώρος φάσεων)

Οι λύσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$ ορίζουν ένα σύστημα συντεταγμένων με άξονες τους Ox, Oy. Το επίπεδο που ορίζεται απ' αυτούς ονομάζεται χώρος φάσεων.

ΔΗΛ: $\forall t \in [0, +\infty)$ ορίζουμε ένα σημείο (x,y) στο επίπεδο Oxy ή στον χώρο των φάσεων.

Πως μπορώ να βρω τον χώρο φάσεων; $\frac{dy}{dt}$



Για κάποια t θα βρω x^*, y^*
Για κάθε t αντιστοιχώ ένα (x,y)

Πως υπολογίζω τα (x,y);
Γράφω το y συναρτήσει του x

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \Longleftrightarrow \dot{y} = \frac{dy}{dx}\dot{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}}$$ ΔΕ 1ης τάξης

Παραδείγματα

(I) $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -ky \quad (k \in \mathbb{R}) \end{cases}$ ανεξάρτητες εξισώσεις

Το κρίσιμο σημείο του συστήματος, (0,0)

Α.Σ.: $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

$$(I) \iff \frac{dx}{dt} = -x \iff \frac{dx}{x} = -dt \iff \int \frac{dx}{x} = -\int dt \iff$$

$$\iff \ln|x| = -t + c \iff \boxed{|x| = c_1 \cdot e^{-t}}$$

Άρα: $(I) \iff \begin{cases} x(t) = x_0 \cdot e^{-t} \\ y(t) = y_0 \cdot e^{-kt} \end{cases}$

Πως μπορώ να εκφράσω το y συναρτήσει του x;

$$y = y_0 \cdot e^{-kt} = y_0 (e^{-t})^k \iff y = \frac{y_0}{x_0^k} x^k \iff y = \left(\frac{y_0}{x_0^k}\right) x^k$$

$$\iff \boxed{y = b \cdot x^k}, \quad b = \frac{y_0}{x_0^k}$$

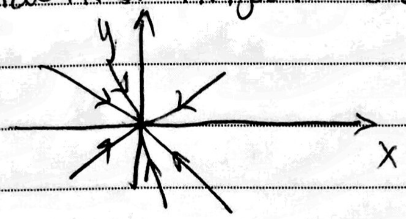
Περιπτώσεις

- $k > 0$, $\forall k > 0$ $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$, $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$

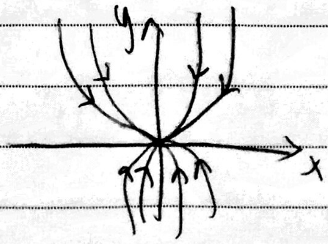
Άρα ασυμπτωτικά πηγαίνω στο κόμβο (ευσταθής κόμβος)

π.χ. $k = 1$

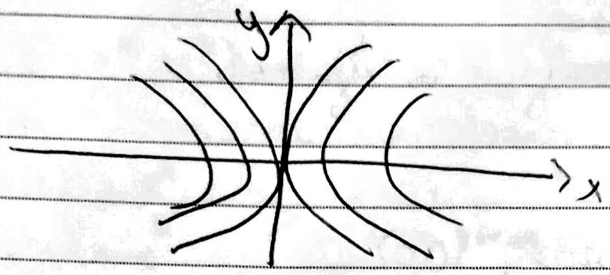
$y = bx$



- $k > 1$, $y = bx^k$ παραβολή

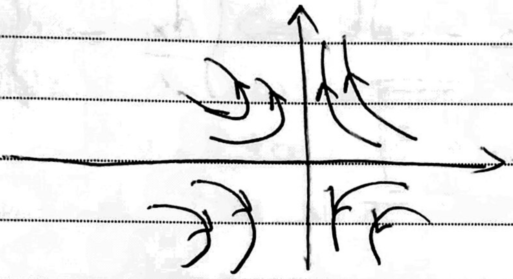


• $0 < k < 1$, $y = b x^k$



$(x^*, y^*) = (0,0)$
κόμβος, σημείο συσσώρευσης

• $k < 0$: $y = b x^{-|k|} \iff y = \frac{b}{x^{|k|}}$ ευσταθές Σ.Ι.
υπερβολές



$(0,0) = (x^*, y^*)$ ασταθές
Το σημείο είναι σαγματικό